HOMMAGE A JEAN-LOUIS KOSZUL
03 JANVIER 1921-12 JANVIER 2018
TOPOLOGIE-GEOMETRIE DE KOSZUL ET THEORIE DES MODELES STATISTIQUES

MICHEL NGUIFFO BOYOM
ALEXANDER GROTHENDIECK RESEARCH INSTITUTE UMR CNRS 5149

Abstract. D'après une conjecture de Gerstenhabher, toute théorie de déformation engendre sa propre théorie de cohomologie. *Every restricted theory of deformation generates its proper cohomology theory*. La théorie de déformations des variétés localement plate a été un sujet central pour plusieurs mathématiciens dont Jean-Louis Koszul, Yozo Matsushima, John Milnor, Albert Nijenhuis. Une des questions qui ont longtemps resisté est la conjecture de Gerstenhaber dans la catégorie des variétés localement plates. La notion d'hyerbolicité y a été introduite par Jean-Louis Koszul. Elle a été étudiée par M. Kaup et par J. Vey. Elle est la source de la Géométrie Hessienne. Cette dernière est un puissant outil de la Géométrie de l'information. A partir de 2010, Jean-Louis Koszul a porté une attenton soutenue à cette thématique où ses travaux ont débouché sur des applications en statistiques. L'objet de cette note est de rendre public cette attention ainsi qu'un complexe de chaine dont l'opérateur bord est l'ultime formule de Koszul.

Prologue

La première conférence internationale en France sur la Géométrie de l'Information eut lieu du 28 au 30 Aout 2013 à l'Ecole des Mines de Paris. De Grenoble Jean-Louis Koszul rejoigna Paris pour honorer de sa présence, la journée du 29 Aout 2013 qui fut consacrée à l'hommage rendu à l'impact sur la Géométrie de l'Information, de ce qui est ces jours appelé Géométrie de Koszul et Topologie de Koszul. Ce fut son dernier déplacement à Paris. A partir de cette expérience, la curiosité de Jean-Louis Koszul pour la Géométrie de l'Information est allée croissante. Entre 2013 et 2017, nous avons eu une correspondence nourie sur des nombreux aspects, en particuier sur la nature homologique de certains invariants de la Géométrie de l'Information. Des considérations et curiosités analogues furent subjets de correspondences avec le regretté Albert Nijenhuis. Ce dernier collabora avec Jean-Louis Koszul sur à l'esquisse pionnière de la topologie de Koszul. Cette note est destinée à un survol rapide des travaux pionniers de Jean-Louis Koszul sur la géométrie localement plate hyperbolique. Ces travaux ont des impacts notables sur le domaine porteur qu'est la Géométrie de l'information. La topologie de Koszul est la théorie d'homologie générée par la Théorie de déformation dans la catégorie des variétés localement plates, c'est à dire la solution de la conjecture de Gerstenhaber dans cette catégorie. Après GSI 2013 j'ai entrepris de convaincre Jean-Louis Koszul que les *Racines profondes de la Théorie des Modèles Statistiques se trouvent dans la Topologie de Koszul*. Dans cette

1991 *Mathematics Subject Classification.*
Key words and phrases. variété hessienne, Géométrie de Koszul, Géométrie de l'information, KV cohomology, Topologie de Koszul, modèle statistique, modèle statistique homologique.

note je rends public l'intérêt et l'attention que les regrettés Jean-Louis Koszul et Albert Nijenhuis ont accordés aux avancées récentes sur la Topologie de Koszul, puis aux impacts de cete dernière sur la théorie des modèles statistiques. Pour conclure cette note je mets en lumière une lecture combinatoire de la géométrie de l'information. *Un modèle statistique classique, e.g. tel que dans Amari-Nagaoka,* est une *feuille d'un arbre enraciné* dans *la théorie homologique des modèles statistiques*. Cette grille de lecture éclaire les suprématies de la Géométrie de Koszul et de la Topologie de Koszul dans les statistiques théoriques et appliquées .

1. Introduction

*As per definition of teacher Adage goes, ** Poor teacher tells, Good teacher demonstrates and Great teacher inspires***

L'objet de cette note est de témoigner. Témoigner de l'impact des travaux de Jean-Louis Koszul sur les mathématiques appliquées via la géométrie de l'information. Il a d'abord regardé avec suspicion la géométrie de l'information, surtout écrivit-il, *quand celle-ci est dite hessienne*. Aux comités d'organisation et scientifique de GSI 2013 à l'Ecole des Mines de Paris, il fit l'honneur d'assister à la journée que GSI 2013 lui dédia.
Après GSI 2013 il entreprit la lecture de son volume des actes de GSI 2013, édités par Springer. Il y trouva matière à commentaires et questions qui furent les sujets des paragraphes entiers des correspondences que nous avons échangées jusqu'à la dernière en la date de 5 Janvier 2018. Témoignage étayé par des extraits de ces correspondences. Entre la géométrie de l'information et la théorie de KV homologie, à laquelle Albert Nijenhuis et lui avaient consacré des energies notables, il a decouvert des connections inattendues. Il partit d'une observation de Albert Nijenhuis, selon laquelle *la formule brutale de l'opérateur cobord* de la KV cohomologie *n'est pas calculable par ordinateur*, pour entreprendre de dégager une formulation de l'opérateur bord de la KV homologie qui se préterait à des manipulations *par recurrence*, et ainsi serait susceptible d'être calculable par ordinateur. En 2015 il y parvint pour les complexes de KV homologie à coefficients triviaux. De cette entreprise j'ai été un témoin privilégié. Dans cette note, du dernier operateur bord construit par Jean-Louis Koszul pour les complexes à coefficients triviaux, je décris un prolongement aux complexes à coefficients non triviaux.

Grosso modo le champ de la géométrie et de la topologie de l'Information est la catégorie des modèles statistiques pour les ensembles mesurables. La géométrie de l'Information est donc une intrusion de la géométrie différentielle dans l'univers des statistiques.
Je vais commencer par des rappels des notions de base de la géométrie de Koszul et de la topologie de Koszul qui sont évoquées dans cette note. Cela est l'aspect mathématique dite fondamentale . Je vais leur consacrer un paragraphe.
Je rappelerai également les notions de base de la théorie classique des modèles statistiques. J'attirerai l'attention sur des lacunes géométriques et sur des lacunes topologiques. Ces lacunes ont obscurcit la richesse en connections de la géométrie de l'information. Ces lacunes ont été à l'origine de la nécessité de renouveler la théorie des modèles statistiques. Le cadre de renouvellement de la théorie des modèles statistiques est une catégorie des fibrations localement triviales au dessus des variétés munies de la Géométrie de Koszul. Les fibres types sont des ensembles mesurables. Ces fibrés portent deux types de structure supplémentaire. Le premier type de structure supplémentaire est *fonctionnel*, le second

type est *homologique*.
Dans chacun de ces deux types de structure supplémentaire la théorie classiques des modèles statistiques est obtenue par des opérations de *trivialisation locale*. Je vais rendre tout cela *élémentaire*.

Dans le type *fonctionnel*, l'espace total du fibré est le domaine de définition d'une fonction densité des probabilités.
Les modéles dégagés de ce type de structure supplémentaire sont appelés *Modèles Statistiques Fonctionnels*. Cette perspective *fonctionnelle* conduit à regarder un modèle statistique classique à la Amari, comme une trivialisation locale de la fibration au-dessus de la Géométrie de Koszul.

Dans le type *homologique* , l'espace total de la fibration est le domaine de définition d'un 2-cocycle scalaire de l' algèbre de Koszul-Vinberg de la base du fibré.
Les modèles issus de ce type de structure supplémentaire sont appelés *Modèles Statistiques Homologiques*. Sous cette perspective *homologique*, la théorie classique des modèles statistiques se voit revêtir de la nature d'un *théorème* de nullité homologique *local*.

La perspective *homologique* est un avatar de la Topologie de Koszul des variétés localement plates. En outre elle est conforme à des augures de Albert Nijenhuis et à des commentaires de Jean-Louis Koszul. Au passage, cette revision de la théorie des modèles statistiques rejoint (, et répond à) des problématiques formulées par Peter McCullagh: *What is a statistical model?,* et par Misha Gromov: *In search of structure*. Je rappelerai les rudiments de la théorie homologique des modèles statistiques.

Le lecteur verra que la théorie des modèles statistiques est pour l'essentiel des domaines de la Géometrie de Koszul et de la Topologie de Koszul.

Suite à la découverte de l'opérateur cobord δ sous sa *formule brutale* j'ai eu des échanges avec Jean-Louis Koszul et Albert Nijenhuis sur d'autres approches de la ce qu'est la topologie de Koszul. Pour l'essentiel il s'agissait de trouver d'autres formulations d de l'opérateur bord (ou cobord donnant la même cohomologie que δ,) telle que l'on puisse *procéder par recurrence pour démontrer* que $d \circ d = 0$.

Sont inattendues des manipulations de la Géométrie de Koszul et de la Toplogie de Koszul pour découvrire la nature homologique de la théorie des modèles statistiques .

2. Geometrie de Koszul

2.1. *Connexions de Koszul dans un fibré vectoriel*

Sauf mention du contraire la classe de différentiabilité est C^∞. Soit M une variété différentiable, $C^\infty(M)$ est l'algèbre des fonctions différentiable dans M. $I_x(M) \subset C^\infty(M)$ est l'idéal des fonctions nulles au point $x \in M$. On considère un fibré vectoriel différentible

$$E \to M$$

dont l'espace des sections et le fibré des 1-jets de sections sont notés $\Gamma(E)$ et J^1E respectivement. La fibre J^1_xE est l'espace vectoriel quotient

$$J^1_xE = \frac{\Gamma(E)}{I^2_x(M)\Gamma(E)}(x)$$

La projection canonique de $\Gamma(E)$ dans J^1E est notée j^1. On note π la projection canonique de J^1E sur E; c'est un homorphisme de fibré vectoriel dont le noyau est le fibré vectoriel $Hom(TM, E)$. A toute scission de a de π on associe la section de $Hom(TM, E)$ notée $\nabla(s)$; elle est définie par

$$\nabla(s) = j^1(s) - a(\pi(j^1(s)))$$

L'application

$$\Gamma(E) \ni s \to \nabla(s) \in \Gamma(Hom(TM, E))$$

est un operateur différentiel d'ordre un du fibré E dans le fibré $Hom(TM, E)$. Si $X \in \Gamma(TM)$ alors l'image par $\nabla(s)$ de X est notée $\nabla_X s$. L'opérateur ∇ est appelé connexion de Koszul dans E. Lorsque E est le fibré tangent de M une connexion de Koszul dans TM est appelée une connexion linéaire dans la variété M.
Soit $\mathcal{R}^1(M)$ le fibré principal des repères linéaires d'ordre un de M. Soit $r_x \in \mathcal{R}^1(M)$ un repère linéaire d'origine $x \in M$. Alors la fibre $J^1_x(TM)$ est (non canoniquement) isomorphe à l'espace tangent à $\mathcal{R}^1(M)$ au point r_x.
Il y a une correspondence biunivoque entre les connexions de Koszul dans TM et les $1-formes$ de connexion dans le fibré principal $\mathcal{R}^1(M)$. Etant donnée une connexion linéaire ∇, son tenseur de courbure R^∇ et son tenseur de torsion T^∇ sont definis par

$$R^\nabla(X, Y).Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z,$$

$$T^\nabla(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

Ici X, Y et Z sont des champs de vecteurs et $[X, Y]$ est le crochet de Poisson des champs de vecteurs X, Y regardés comme des fonctions dans la variété symplectique T^*M.

Definition 2.1. Une variété localement plate est un couple (M, ∇) formé d'une variété différentiable M et d'une connexion de Koszul ∇ dont le tenseur de courbure R^∇ et le tenseur de torsion T^∇ sont nuls.

L'étude des variétés lcalement plate est une part importante dans les travaux de Jean-Louis Koszul. La géométrie et la topologie de ces variété ainsi que la théorie de leur déformation ont fourni des nombreux points de rencontre entre des travaux de l'école de mathématique russe (e.g. Dynkin et sa descendence) et des travaux de l'école japonaise (e.g. Yozo Matsushima et sa desecendence). Un problème fondamental est de savoir si une variété M admet des structures localement plates. Jusqu'à recemment seulement des exemples ont été construits par des nombreux mathématiciens dont W. Thurston, Joh Milnor et d'autres. Jean-Louis Koszul a continué de suivre l'état de ce problème. Je signalerai plus loin comment l'analyse globale des opérateurs hessiens de Koszul a permis la découverte d'une obstruction caractéristique à ce problème.

2.2. *Hyperbolicité des variétés localement plates*

On note $\tilde{M}$ l'espace des *classes d'homotopie à extemités fixes* des chemins d'origine fixée $x_0 \in M$. La projection

$$p([c]) = c(1)$$

est un revêtement universel de M. Soit τ_σ^∇ le transport parallèle de $T_{x_0}M$ dans $T_{c(\sigma)}$ qui est défini dans une structure localement plate (M, ∇). Jean-Louis Koszul définit le deroulement d'un chemin c dans l'espace vectoriel $T_{x_0}M$ comme il suit

$$Q(c) = \int_0^1 (\tau_\sigma^\nabla)^{-1}(\frac{dc(t)}{dt}(\sigma))d\sigma$$

La valeur $Q(c)$ ne depend que de la classe d'homotopie $[c]$.

Definition 2.2. Une structure localement plate (M, ∇) est dite hyperbolique si l'image de déroulement $Q(\tilde{M}) \subset T_{x_0}M$ est un convex ne contenant pas de droite entière.

Cette notion d'hyperbolicité et sa variante analytique complexe ont été introduites indépendemment par Koszul et par Kaup. La notion d'hyperbolicité est la clef de l'impact notable de la Géométrie de Koszul sur la Géométrie de l'Information. En fait Jean-Louis Koszul démontre qu'une condition necessaire à l'hyperbolicité de (M, ∇) est que (M, ∇) soit sous-jacente à une structure Hessienne exacte (M, g, ∇). Pour donner la signification de l'exactitude de la métrique g je vais rappeler un autre sujet fondamental dans les travaux de Jean-Louis Koszul.
Au cours de leur séjour simultanné à l'université de Genève dans les années soixante, Jean-Louis Koszul et Albert Nijenhuis ont collaboré en vue de résoudre la conjecture de Gerstenhaber pour la théorie de *déformation* des variétés localement plates.

Every restricted theory of deformation generates its proper theory of cohomology (M. Gerstenhaber)

Autrement dit, une fois définie la notion de *déformation infinitésimale* et celle de *déformation infinitésimale trivale* il existerait une théorie de cohomologie dans la quelle les déformations infinitésimales sont des cocycles et les déformations infinitésimales triviales sont des cobords. Suite à des tentatives de Jean-Louis Koszul et de Albert Nijenhuis, Jean-Louis Koszul publia en 1968 dans les Annales de l'Institut Fourier un article intitulé *Déformation des variétés localement plates*. De son côté Albert Nijenhuis publia dans Enseignement Mathématiques un article intitulé *Quelques propriéés communes à des types différents d'algèbres*. L'article de Albert Nijenhuis est une esquisse de la version homologique des déformations des variétés localement plates. Cette publication de Nijenhuis dans Enseignement Mathématique contient en germe la théorie des opérades.
Quand je vins à bout de cette conjecture, le commentaire de J. Stasheff fut d'une élégnance qui sied.

Just what is needed, (J. Stasheff.)

La solution de la conjecture de Gerstenhaber pour les déformations des variétés localement plates est appelée la KV cohomologie, ou cohomologie des KV algèbres, KV pour Koszul-Vinberg.
Tous les deux alors tnésards sous la direction de Jean-Louis Koszul le regretté Jacques

Vey et moi nous sommes essayés à la conjecture de Gerstenhaber pour les variétés localement plates. Je signalerai d'autres liens avec la Géométrie des domaines bornés, en particulier avec la géométrie des cônes convexes, largement déveoppée par Gindikin, Pyatecci-Shapiro, Vinberg et par d'autres

Definition 2.3. Une algèbre A dont la multiplication est notée $a.b$ est appeée algèbre de Koszul-Vinberg si son associateur est symétrique par aux deux arguments de gauche, i.e. pour tout triplet $(a, b, c) \in A^3$ on a

$$(a.b).c - a.(b.c) = (b.a).c - b.(a.c).$$

Les algèbres de Koszul-Vinberg sont aussi appelées Algèbres symétriques à gauche, algèbres Pré-Lie. Selon certains dire, Cayley les aurait rencontré. Par contre, les intérêts géométriques pour ces algèbres, pour leurs modules et pour la théorie de cohomolgie qui en dériverait trouvent leur source dans les travaux et dans des préccupations simultannées de Jean-Louis Koszul, de Albert Nijenhuis, de Yozo Matsushima et des mathématiciens russes des quels comptent Dynkin, Gindikin, Piatecii-Shapiro, Vinberg. Un des problèmes fondamentaux était la conjecture de Gerstenhaber dans la théorique des déformations de ces algèbres et de leurs modules. Autrement dit, découvrir la théorie de cohomologie qui code ces déformations. Les innovateurs dans cette direction furent Jean-Louis Koszul et Albert Nijenhuis.

The work of Mr Boyom that I am familiar with is that regarding the KV-cohomology. It is a subject to which I have devoted, at one time, considerable energy. So has Mr Koszul, of whom I have the highest opinion. More or less simultaneously, he and I found a basic formula for what I called Vinberg algebras (now re-named KV-algebras , to recognize the contributions of Mr Koszul. (Albert Nijenhuis)

Soit A une algèbre de Koszul-Vinberg, soit W un espace vectoriel W. On fixe deux applications bilninéaires

$$A \times W \ni (a, w) \to a.w \in W,$$
$$W \times A \ni (w, a) \to w.a \in W.$$

Definition 2.4. W est un bi-module de A si les applications bilinéaires satisfont les identités suivantes:

$$KV(a, b, w) = 0,$$
$$KV(a, w, b) = 0.$$

Dans les égalités de la définition ci-dessus les membres de gauche sont appelés KV anomalies et sont définis comme il suit,

$$KV(a, b, v) = (a.b).w - a.(b.w) - (b.a).w + b.(a.w),$$
$$KV(a, w, b) = (a.w).b - a.(w.b) - (w.a).b + w.(a.b).$$

Le sous $J(W)$ est formé des éléments $w \in W$ statisfaisant l'identité

$$(a.b).w = a.(b.w)$$

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué par les sous-espaces homogènes C^* suivants:
$C^q = 0$ si q est un nombre entier négatif; $C^0 = J(W)$; lorsque q est un nombre entier positif $C^q = A^{*\otimes q}, W$.
Pour des raisons de simplification des calculs, on identifie l' espaces vectoriel $A^{*\otimes q} \otimes W$

avec l'espace vectoriel $Hom(A^{\otimes q}, W)$.
Pour $f \in C^q$ et $\xi = a_1 \otimes .. \otimes a_{q+1} \in A^{q+1}$, ce que Albert Nijenhuis et Jean-Louis Koszul appelent formule brutale de l'opérateur cobord est l'application δ de C^q dans C^{q+1} définie comme il suit:

$$\delta f(\xi) = \Sigma_{j\leq q}(-1)^j [a_j.f(a_1 \otimes ..\hat{a}_j \otimes .. \otimes a_{q+1})$$

$$+(f(a_1 \otimes ..\hat{a}_j \otimes .. \otimes a_q \otimes \hat{a_{q+1} a_j}).a_{q+1}$$

$$-\Sigma_{k\neq j} f(a_1 \otimes ..\hat{a}_j \otimes a_j.a_k \otimes .. \otimes a_{q+1})].$$

On pose

$$C = \oplus_q C^q.$$

Le couple (C, δ) est un complexe de cochaines dont la cohomologie est notée $H^*(A, W)$.

Soit (M, ∇) une variété localement plate. On désigne par A l'algèbre de Koszul-Vinberg dont l'espace vectoriel sous-jacent est l'espace vectoriel des champs de vecteurs dans M et dont la multiplication $X.Y$ est définie par la connexion de Koszul ∇, c'est à dire

$$X.Y = \nabla_X Y$$

La KV algèbre A est un bi-module de elle même et $C^\infty(M)$ est un module à gauche de A. Avec l'opérateur δ défini ci-dessus, on obtient les espaces de cohomologie $H^*(A, A)$ et $H^*(A, C^\infty(M))$. Ces deux espaces de cohomologie sont ceux naguère recherchés par Jean-Louis Koszul et Albert Nijenhuis d'une part et par Y. Matsushima d'autre part.
$H^*(A, C^\infty(M)$ était espéré par Yozo Matsushima et Jean-Louis Koszul pour dégager une formulation purement algébrique de la théorie des variétés localement hyperboliques.
$H*(A, A)$ était attendu par Albert Nijenhuis et Jean-Louis Koszul pour résoudre la conjecture de Gerstenhaber dans la catégorie des variétés localement plates.

... Some times ago, Mr Boyom came with a new set of formulas leading to a new cohomology theory for the KV-algebras. His formulas are much better than what was known. They also show some most remarkable ability to carry out extremely complicated calculations. (These cannot be done by a computer).
.. As a result of the new formulas, there is now an alternative cohomology theory for associative algebras. (The older is due to Hochschild), (Albert Nijenhuis)

On peut maintenant coder les déformation d'une structure localement (M, ∇) à l'aide du complexe de cochaine $(T(A^*) \otimes A, \delta)$. Ici A est la KV algèbre de (M, ∇), A^* est l'espace vectoriel dual de A et $T(A^*)$ est l'algèbre tensorielle de A^*. J'ai signalé qu'il y a correspendence bijective entre les déformations d'une structure localement plate (M, ∇) et celles sa KV algèbre A. Ces dernières sont codées par une variété algébrique (singulière) dont les points sont les 2-cochaines symétriques, zéros du polynôme de Maurer-Cartan du complexe des cochaines $(\tau(A^*) \otimes A, \delta)$, i.e. les tenseurs $S \in A^{*\otimes 2} \otimes A$ tels que

$$\delta S + KV(S) = 0.$$

Ci-dessus S est une application bilinéaire symétrique de A dans A et KV(S) est la KV anomalie du produit défini par S, c'est à dire que pour X,Y,Z on a

$$KV(S).(X \otimes Y \otimes Z) = S(S(X, Y), Z) + S(Y, S(X, Z)) - S(S(Y, X), Z) - S(X, S(Y, Z))$$

2.3. *Jean-Louis Koszul et la Géométrie de l'Information*

Au dédut de l'année 2012 les comités d'organisation et scientifique de GSI2013 avaient décidé de rendre hommage à Jean-Louis Koszul en reconnaissance de l'impact de ses travaux sur la Géométrie de l'Information. Je fus chargé de l'en informer et d'exprimer les voeu qu'il fasse le deplacement de Grenoble à l'Ecole des Mines de Paris pour y être présent pendant cette journée dédiée à lui rendre Hommage. Après que j'ai accompli cette mission Jean-Louis Koszul m'écrivit plusieurs courriers sans jamais parler de la sollicitation de sa présence à l'Ecole des Mines de Paris. Je lui avais fait part de l'invitation envoyée à H. Shima.
Dans les correspondences qui ont suivi il ne fit pas mention de la proposition que je lui transmis au nom des comités d'Organisation et Scientifique de GSI2013. Dans un courrier qu'il m'écrvit le 12 Décembre 2012:

.. Je suis fort content d'apprendre que vous avez invité Shima à votre congrès GSI. Il a été je crois l'un des premiers, sinon le premier, à voir que la géométrie hessienne avait des affinités inattendues, (J-L Koszul)

Beaucoup dont Jean-Koszul, Ernest B. Vinberg, John Milnor, Albert Nijenhuis ou Alexander K. Gut ont laissé drrière eux d'importants problèmes dont ceux de l'existence de structures localement plates, de l'existence de structures hessiennes dans une variété Riemmanienn, de l'existence de structures hessiennes dans une variété localement plate ou de l'existence de structures symplectiques.

Le 20 Janvier 2012 J'informai Jean-Louis Koszul de la découverte d'une fonction définie dans le module des connexions de Koszul dont certaines valeurs extremales fournissaient des obstructions caractéristiques à des problèmes qui l'avaient intéréssé. Je lui parlai alors des applications de cette décourverte à la Géométrie de l'Information hessienne de via la géométrie des variétés localementplates hyperboliques.
Le 3 Février 2012 Jean-Louis Koszul m'écrivit ceci.

... Les résultats dont parle votre lettre du 20 mettent en jeu des choses que je n'ai plus bien bien présentes à l'esprit, mais en gros, je crois un peu comprendre de quoi il s'agit et cela me semble intéressant. Ce qui reste par contre un mystère absolu pour moi c'est ce que signifie au juste " géométrie de l'information". Et quand en plus elle est hessienne, cela n'arrange rien. Notez que je suis habitué depuis longtemps à voir naitre des terminologies bizzares et à assister à des détournements de sens audacieux, voire criminels. Donc cela ne m'empeche pas de dormir (J-L Koszul).

Nous avons continué d'échanger sur deux sujets: (i) la question de savoir s'il existe des manipulations rendant possible la démonstration par recurrence de l'identité

$$\delta \circ \delta = 0,$$

(ii) la Géométrie de l'information hessienne.
Le 20 Décembre 2012 Jean-Louis Koszul m'écrivit.

.. Je suis sensible à l'honneur que me fait le comité d'Organisation du congrès 2013

en m'invitatnt à la conférence de Shima et je vous demande de bien vouloir lui transmettre mes remerciements. J'aimerais aussi pouvoir vous dire de transmettre mon acceptation..... (J-L Koszul).

Dans plusieurs courriers j'ai fait part à Jean-Louis Koszul des lacunes topologico-géométriques que j'avais relevées dans la théorie classique des modèles statistques en vogue dans la littérature sur le sujet. Mes arguments étaient souvent de nature homologique, la cohomologie en jeu étant celle du KV complexe (C, δ). Au mois de Mai 2013 Jean-Louis revint sur les liens entre la géométrie hessienne, les familles exponentielles et la théorie de KV cohomologie. La question de savoir si un modèle statistique est une famille exponentielle est importante en statistiques pures ou appliquées. Par les travaux de Amari I-S on savait que l'information de Fisher d'un modèle exponetiel est une métrique hessienne. Resistait la question de savoir *When a statistical model is exponential?* Je venais de lui communiquer une caratérisation homologique des familles exponentielles. Jean-Louis Koszul cherchait des manipulations de l'opérateur cobord de Chevalley-Eilenberg qui aboutirait à un opérateur bord (ou cobord) d jouissant des propriétés suivantes:
(a) on peut procéder par recurrence pour démonter l'identité $d \circ d = 0$,
(b) la cohomologie issue de d est la même que celle issue de l'opérateur cobord brutal δ.
Il avait surement à l'esprit un passage de l'écrit de Albert Nijenhuis au sujet de la théorie de KV module et de l'opérateur cobod brutal δ: .. *Better even, it astonishes me how he could ever have thought of them (Albert Nijenhuis).* Le 16 mai 2013 Jean-Louis Koszul m'écrivit

.. Merci pour votre envoi du 30 Avril qui m'a bien intéressé. Je suis très surpris d'apprendre que vous avez dégagé cette formule de bord (ou de cobord) sans partir du complexe de Chevalley-Eilenberg. Il n'y avait pas grand chose pour vous mettre sur la bonne voie. Il est assez curieux que ce soit cette manipulation simple du complexe de Chevalley-Eilenberg qui a conduit Loday aux algèbres de Leibniz mais que ce n'est pas du tout l'analogue qui a conduit aux algèbres dont parle votre papier puisque celles-ci sont sorties de l'étude des variétés localement plates.....
Sauf erreur ce que l'on sait sur la restriction de δ aux formes alternées (en s'appuyant sur Chevalley-Eilenberg) n'aide en rien pour la démonstration de votre Lemme 4. Dans la mesure où il est je crois intéressant d'expliciter $\delta \circ \delta$ avant de faire des hypothèses sur le produit, c'est finalement une démonstration "brutale" comme celle que vous esquissez qui aurait mes faveurs. On peut sans doute faire mieux, et je n'ai pas bien compris le cas d'un module de coefficients non triviaux! (J-L Koszul)

Dans les correspondences qui ont suivi Jean-Louis Koszul reviendra souvent sur le problème

$$\delta \circ \delta = 0.$$

Il est maintenant convaicu que la KV cohomologie est la théorie que Albert Nijenhuis et lui ont tenté de construire. Il est aussi convaicu de l'efficacité de la KV cohomologie pour une formulation algébrique des liens entre la Géométrie de Koszul et la théorie des modèles statistiques. Il sait que la conférence de Shima au GSI 2013 portera sur l'aspect géométrie différentielle des ce questions. Il avait connaissance du fait j'avais construit un KV module semi-simplicial qui engendre un complexe quasi-isomorphe au KV complexe (C^*, δ).

.. Merci pour les tirés-à-part que vous m'avez envoyés. Je n'avais pas compris que c'était

votre article du Pacific Journal qui me donnerait ce que je cherchais. Je comprends mieux maintenant ce que dit Nijenhuis dans le texte que vous m'avez envoyé..(J-L Koszul)

Après la conférence internationale GSI2013 j'ai eu beaucoup d'échanges avec Jean-Louis Koszul sur la Géométrie de l'information. Il avait lu des nombreux textes dans le volume des proceedings édité par Springer. On a échangé sur l'utilisation de la fonction caractéristique de Koszul-Vinberg des cones convexes en statistiques (voir les travaux de Frédéric Barbaresco). Via les travaux de Shima sur la Géométrie différentielle des variétés Hessiennes, Jean-Louis Koszul a pris connaissance du fait que beaucoup de modèles statistiques largement populaires sont *localement* des variétés localement plates hyperboliques. J'entrepris de le persuader de la nature homologique de ces liens. Pour s'en convaincre il revint sur le complxe de cochaines (C, δ). Fréquemment il s'interrogea sur la possibilité de manipuler l'opérateur de Chevalley-Eilenberg pour obtenir une démontration par récurrence de l'identité

$$\delta \circ \delta = 0.$$

Le 5 Mai 2013 Jean-Louis Koszul m'écrit:

Loday est parti du complexe de Chevalley-Eilenberg. Si je me souviens bien et si ce dit Wikipedia des algèbres de Leibniz est correct, les choses ne se sont pas passées dans cet ordre. En modifiant l'écriture de l'opérateur cobord d dans ce complexe des formes alternées, Loday a observé que l'extension de ce operateur à toutes les formes multilinéaires était encore de carré nul et même que pour cela, il suffisait que le crochet vérifie [[a,b],c] = [[a,c],b] + [a,[b,c]], sans plus. Je n'ai pas encore bien compris la manière dont vous conduisez le calcul de $d \circ d$*, en particulier dans le cas de coefficients non triviaux. Il faut dire que je n'ai pas pu y réfléchir longuement ces derniers temps. Je vais m'y mettre, (J-L Koszul)*

De retrour à Grenoble après GSI 2017 Jean-Louis poursuivit la lecture l'exemplaire des proceedings édité par Springer. Avant la tenue de GSI 2013 Jean-Louis a pris la mesure des connections entre d'une part les mathématiques appliquées, versus la géométrie de l'information et, d'autre part ses travaux sur la Géométrie des variétés localement plates hyperboliques et ceux de Vinberg sur les cones homogènes. Il a également pris la mesure de l'utilité de formuler ces connections en termes de KV cohomologie des algèbres de Koszul-Vinberg. D'après ce qu'en a écrit Albert Nijenhuis la formule brutale n'est pas calculable par ordinateur. Jean-Louis Koszul est venu à la conclusion que des demonstrations par reccurence auraient les faveurs des méthodes numériques, donc seraient exécutables par ordinateur.

Je ne regrette pas d'avoir été à Paris le 29 Aout, en plus de ces retrouvailles avec Shima, j'ai observé avec intérêt ce colloque GSI dont le contenu et les objectifs étaient pour moi assez mystérieux. J'ai aussi regardé avec curiosité le volume de Lecturres Notes publié à l'occasion de cette rencontre et cela m'a bien aidé à comprendre ce que l'on visait. A propos de ce volume, réussir à le sortir dans les délais est une prouesse que j'admire beaucoup. Je crois bien n'avoir jamais vu cela.. Encore une fois, merci de m'avoir signalé cette rencontre et de m'avoir encouragé à faire le déplacement.. (J-L Koszul)

3. Dernière Formule de Koszul

Cette section est consacrée à une reécriture de la formule brute que Jean-Louis Koszul m'a communiquée en 2015. Cette formule de bord concerne les KV complexes à coefficients triviaux. C'est elle que je nomme Dernière Formule de Koszul. J' en ai donné un prolongement aux coefficients non triviaux.

3.1. *Jean-Louis Koszul et des méthodes numériques. Une autre formule de cobord*

Jean-Louis Koszul savait que j'avais contruit un KV module simplicial dont le complexe dérivé produit une cohomologie qui est (non canoniquement) isomorphe à celle définie par la formule brutale δ.
Je ne savais pas qu'il avait entrepris de construire un opérateur bord d dont le carré $d\circ d$ soit calculable par ordinateur. Il mit au point une construction qu'il me communiqua en 2015. Peut-être s'est-il inspriré de la construction du classique complexe de Koszul, (manipulé par les topologues algébriques sous le nom de complexe de Koszul, et par les analystes globaux sous le nom de complexe de Spencer ou de Spencer-Kuranishi). Il m'en parlait de manière allusive au cours de 2014-2015. Il obtint enfin une formule dont la version duale donne les mêmes espaces de cohomologie totale que la *formule brutale* appliquée aux coefficients triviaux. En 2015 il me communiqua un résultat, sa dernière formule.

...Je vois une manière de procéder, mais on peut sans doute faire mieux:
Pour tout couple i,j d'éléments distincts dans [1,p+1], on notera $i\backslash j$ *l'élément de [1,p] égal à i si* $i<j$ *et égal à i-1 si* $i>j$. *On observe que* $i+j\backslash i = j+i\backslash j+1$ *ou* $j+i\backslash j-1$.
Soit A un K-espace vectoriel muni d'un produit bilinéaire

$$(a,b)\to a.b$$

Quel que soit p, pour i,r distincts dans [1,p+1], et $a_1\otimes..\otimes a_{p+1}$ *dans* $\otimes^{p+1}A$, *on pose*

$$d_{i,r}(a_1\otimes..\otimes a_{p+1}) = (..\hat{a}_i\otimes..a_ia_r\otimes...)$$

et

$$d=\Sigma_{r\neq i}\Sigma_{i=1,...p+1}(-1)^i d_{i,r}.$$

Calcul de $d^2(a_1\otimes..\otimes a_{p+1})$. *C'est une somme de termes qui, au signe près sont de la forme* $d_{j\backslash i,s\backslash i}(a_1\otimes..\otimes a_{p+1})$ *avec r,j,s distincts de i et s distinct de j. Si de plus r est distinct de j et de s, c'est à dire si les entiers i,r,j,s sont tous distincts, alors* $d_{i\backslash j,r\backslash j}d_{j,s}(a_1\otimes..\otimes a_{p+1})$ *est également défini et est égal à* $d_{j\backslash i,s\backslash i}d_{i,r}(a_1\otimes..\otimes a_{p+1})$. *C'est le produit* $a_1\otimes..\otimes a_{p+1}$ *dans le quel on a supprimé les facteurs d'indice i et j et replacé respectivement* a_r *et* a_s *par* a_ia_r *et* a_ja_s. *Dans* $d^2(a_1\otimes...\otimes a_{p+1})$ *ces termes sont affectés respectivement des signes* $(-1)^{i+j\backslash i}$ *et* $(-1)^{j+i\backslash j}$ *qui sont opposés comme vu plus haut. Ne subsistent dans* $d^2(a_1\otimes..\otimes a_{p+1})$ *que les termes dont les indices i,r,j,s vérifient soit* $s=r$ *soit* $j=r$*: au signe près ils sont de la forme* $d_{j\backslash i,r\backslash i}d_{i,r}(a_1\otimes..\otimes a_{p+1})$ *ou* $d_{j\backslash i,s\backslash i}d_{i,j}(a_1\otimes..\otimes a_{p+1})$. *On va grouper ces termes avec ceux qui s'en déduisent en échangeant i et j. Pour toute suite (i,j,r) dans [1,p+1] avec i<j et r différent de i et de j on obtient ainsi une somme de 4 termes qui ne diffèrent que par les facteur d'indice* $r\backslash i$. *C'est l'image de* $a_1\otimes..\otimes a_{p+1}$ *par*

$$(-1)^{i+j\backslash i}d_{j\backslash i,r\backslash i}d_{i,r}+(-1)^{i+j\backslash i}d_{j\backslash i,r\backslash i}d_{i,j}+(-1)^{j+i\backslash j}d_{i\backslash j,r\backslash j}d_{j,r}+(-1)^{j+i\backslash j}d_{i\backslash j,r\backslash j}d_{j,i}$$

c'est à dire (puisque $j\backslash i=j-1$*)*

$$..\hat{a}_i\otimes..(-1)^{i+j}(-a_j(a_ia_r)-(a_ia_j)a_r+a_i(a_ja_r)+(a_ja_i)a_r)\otimes..\hat{a}_j\otimes..$$

Autrement dit
$d^2(a_1 \otimes .. \otimes a_{p+1}) = \Sigma_{r\neq i, r\neq j}\Sigma_{i<j} a_1 \otimes .. \otimes \hat{a}_i \otimes ..(-1)^{i+j+1} \otimes \phi(a_i, a_j, a_r) \otimes .. \otimes \hat{a}_j \otimes .. \otimes a_{p+1}$
où

$$\phi(a_i, a_j, a_r) = (a_i a_j)a_r - a_i(a_j a_r) - (a_j a_i)a_r + a_j(a_i a_r)$$

est l'antisymétrique à' gauche de l'associateur. Qu'en penez vous? (J-L Koszul)

Comme j'ai observé, une lecture attentive de construction que Jean-Louis Koszul propse entre 2014 et 2015 semble être inspirée de la contruction du classique complexe de Koszul. Jean-Louis Koszul écrit ne pas savoir ce qui en est du cas des coefficients non triviaux.

3.2. *Commentaire*

Sans entrer dans des détails je signale que la construction ci-dessus produit la KV *homologie totale* à coefficients triviaux. Sa version duale est la KV cohomologie totale à coefficients réels. Si on étudie les statistiques dans les groupes de Lie cette construction de Koszul donne la KV cohomologie totale qui est sources des connections entre la Géométrie de l'Information et la Topologie différentielle, versus feuilletages Riemanniens
Même dépourvu de familiarité avec l'algèbre homologique praticable le lecteur verra sans difficulté que les opérateurs $d_{i,j}$ se prètent à des manipulations *par recurrence*. Ainsi cette construction rend plausibles des méthodes numériques pour calculer le carré $d \circ d$. Vu sous cet angle l'opérator bord

$$d = \Sigma_{r\neq i}\Sigma_{i=1,...,p+1}(-1)^i d_{i,r}$$

est un outil efficace de la Géométrie de l'information, versus *computer information geometry*
Je vais conclure cette partie consacrée à des impacts de Topologie-Géométrie de Koszul sur la Théorie des modèles statistiques.
J'ai cité des extraits des correspondences qui attestent l'intérêt et l'attention que Koszul a accordés à ce sujet après GSI 2013.
La géométrie de Koszul influe la théorie des modèles statistiques par le biais de la géométrie hessienne.
Dans la dernière section je vais signaler sans détails que la Géométrie de Koszul ainsi que la théorie classique des modèles statistiques sont en fait des théorèmes de nullité cohomolgique locaux dans la théorie de KV cohomologie des algèbres de Koszul-Vinberg.
Jean-Louis Koszul a écrit *n'avoir pas vu comment étendre sa construction de l'opérateur bord au cas des coefficients non triviaux*. Il s'agit de l'opérateur bord

$$d = \Sigma_{r\neq i}\Sigma_{i=1,...,p+1}(-1)^i d_{i,r}$$

L'opérateur d est un endomorphisme linéaire de dégré -1 de l'espace vectoriel gradué

$$T(A) = \oplus_q A^{\otimes q}.$$

Voici une tentative que Jean-Louis Koszul me communiqua.

.. Je considère une KV algèbre A et un A-module non triviale M. On munit M du produit tirivial. Alors $A \oplus M$ est une KV algèbre. Dans l'espace vectoriel gradué

$$\mathcal{T} = \Sigma_q (A \oplus M)^{\otimes q}$$

on construit les opérateurs $d_{i,r}$ et

$$d = \Sigma_{r\neq i}\Sigma_{i=1,...,p+1}(-1)i d_{r,i}.$$

Le complexe $(\mathcal{T}, d)$ *est gradué par les sous complexes de dégré q,* $(\mathcal{T}^q, d)$ *formé des chaines qui dont le dégré par rapport aux éléments de M est q. Le sous-complexe homogène de dgré zéro est le complexe d'homologie à coefficients triviaux. Je n'ai pas réussi à interpréter ceux de dégrés positifs.. (J-L Koszul)*

Je retourne à la construction par Jean-Louis Koszul des opérateur $d_{r,i}$. Je vais transcrire sa construction, versus KV complexe total de cochaines et en donner un prolongement au cas des coefficients non triviaux. C'est l'objet de la sous-section qui suit.

3.3. *Prolongement de l'opérateur bord de Koszul aux coefficients non triviaux*

Je vais donner de la dernière de formule de Koszul, un prolongement aux coefficientts non triviaux.
Soit W un bi-module non trivial d'une algèbre de Koszul-Vinberg A, (aussi nommée algèbre Pré-Lie pour ceux qui préfèrent cette appelation).
Soit A^* l'espace vectoriel dual de A. On identifie le produit tensoriel $A^{*\otimes p} \otimes W$ avec l'espace vectoriel des applications linéaires de $A^{\otimes p}$ dans W. Soient $f \in A^{*\otimes p} \otimes W$ et $a_1 \otimes .. \otimes a_{p+1}$ dans $A^{\otimes p+1}$.
(1) Pour i,r dans [1, p+1] avec $i < r \leq p$ on définit l'élément $s_{i,r}(f)$ dans $A^{*\otimes p+1}$ comme il suit:

$$\begin{aligned}
s_{i,r}f(a_1 \otimes .. \otimes a_{p+1}) &= (-1)^i[a_i.f(..\hat{a}_i \otimes .. \otimes a_r \otimes ...) \\
&+(f(..\hat{a}_i \otimes .. \otimes a_r \otimes ..a_{\hat{p+1}} \otimes a_i)).a_{P+1} \\
&-pf(..\hat{a}_i \otimes .. \otimes a_i a_r \otimes ...)] \\
&+(-1)^r[a_r.f(.. \otimes a_i \otimes ..\hat{a}_r \otimes ...) + (f(.. \otimes a_i \otimes ..\hat{a}_r \otimes ..a_{\hat{P+1}} \otimes a_r)).a_{P+1} \\
&-pf(.. \otimes a_r a_i \otimes ..\hat{a}_r ...)].
\end{aligned}$$

(2) Pour r = p+1 définit $\delta_{i,p+1}$ par

$$\begin{aligned}
s_{i,p+1}f(a_1 \otimes .. \otimes a_{p+1}) &= (-1)^i[a_i.f(..\hat{a}_i \otimes .. \otimes a_{p+1}) \\
&+(f(..\hat{a}_i \otimes ..a_{\hat{p+1}} \otimes a_i)).a_{p+1} \\
&-pf(..\hat{a}_i \otimes .. \otimes a_i a_{p+1})].
\end{aligned}$$

(3) Par linéarité les $s_{i,r}$ sont des applications linéaires de $A^{*\otimes p} \otimes W$ dans $A^{*\otimes P+1} \otimes W$.
De la famille $s_{r,i}$ je dégage deux opérateurs de dégré 1 :

$$d_{KV} = \Sigma_{i<r\leq p} s_{i,r},$$

$$d_\tau = \Sigma_{i<r\leq p+1} s_{i,r}.$$

L'opérateur d_{KV} est défini dans

$$C_{KV} = J(W) + \Sigma_{q>0} A^{*\otimes q} \otimes W,$$

L'opérateur d_τ est défini dans

$$C_\tau = W + \Sigma_{q>0} A^{*\otimes q} \otimes W.$$

Ils sont de carré nul, on obtien ainsi deux complexes de cochaines (C_{KV}, d_{KV}) et (C_τ, d_τ).
Dans le cas d'un module trivial d_τ coincide avec la transposée de l'opérateur d construit par Jean-Louis Koszul, c'est à dire la transposée de

$$d = \Sigma_{r\neq i}\Sigma_{i=1,...,p+1}(-1)^i d_{i,r}$$

Remarques:
(1) Dans le cas de coefficients non triviaux d_{KV} *est l'opérateur que cherchaient Albert*

Nijenhuis et Jean-Louis Koszul, pour dégager une formulation homologique de la théorie de déformation des variétés localement plates; c'est à dire la solution de la conjecture de Gerstenhaber.
(2) L'opérateur d_τ a été construit par Byande, Ngakeu, Wolak et moi pour dégager des connections entre la topologie de Koszul, c'est à dire la théorie de cohomologie des algèbres de Koszul-Vinberg, la géométrie de l'information et la topologie différentielle versus feuilletages Riemanniens.

On considère l'espace vectoriel C_τ gradué positivement par les sous-espaces homogènes

$$C^0 = W,$$

$$C^q = A^{*\otimes q} \otimes W.$$

Dans l'espace vectoriel gradué

$$C_\tau = \oplus_q A^{*q} \otimes W$$

on a les deux structures de complexe de cochaine $[C_\tau, \delta]$ et $[C_\tau, d]$. L'opérateur cobord δ est donné par la formule brutale. En tout dégré q on définit les endomorphisms linéaires des C^q. C'est l'application identité dans C^0; dans les cas des $q > 0$, c'est l'homothétie

$$f \to qf.$$

On obtient un quasi-isomorphisme de $[C_\tau, d]$ dans $[C_\tau, \delta]$.

3.4. *Formulation homologique de la Géométrie hessienne et de la Géométrie de Koszul*

Dans une variété M on entendra par tenseur métrique toute forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Rappelons que la structure hessienne est un triplet (M, g, ∇) formé d'une structure localement plate (M, ∇) et d'une d'une variété (pseudo) Riemannienne (M, g) dont le tenseur métrique est localement de la forme $\nabla^2 h$ où h est une fonction locale.
(1) Lorsque A est la KV algèbre d'une structure localement plate (M, ∇) alors un tenseur metrique g définit une structure hessienne (M, g, ∇) si et seulement si g est un 2-cocycle de A à coefficients dans l'espace des fonctions $C^\infty(M)$.
Une structure hessienne (M, g, ∇) détermine une classe de cohomologie $[g]$ dans $H^2(A, C^\infty(M))$.

Je donne ci-dessus une formulation homologique de la Géométrie de Koszul telle qu'elle est utilisée en Géométrie de l'information.
(2) Une condition nécessaire pour qu'une variété localement plate (M, ∇) soit hyperbolique est qu'elle admette une structure hessienne exacte (M, g, ∇), c'est à dire qu'il existe une 1-forme differentielle ω telle que

$$g = \delta\omega.$$

Si la variété est compacte alors cette condition est suffisante.

J'ai signalé qu'au cours de leur séjour simutanné à l'université de Genève en 1968 Albert Nijenhuis et Jean-Lous Koszul ont travaillé sur la conjecture de Gerstenhaber dans la catégorie des variétés localement plates. Au cours des années soixante Jean-Louis Koszul a séjourné également au Japon où Yozo Matsushima et lui ont travaillé sur le même sujet. L'orientation de Shima H. vers la Géométrie hessienne trouve ses racines dans des cours et des exposés de Jean-Louis Koszul dans les universités de Nagoya et de Osaka dans les années soixantes.
Dans un article publié dans les Annales de l'Institut Fourier de 1968, (déformation des variétés localement plates,) Jean-Louis Koszul montre que toute structure hyperbolique admet

des déformations non triviales.
A supposer qu'en 1968, la conjecture de Gerstenhaber eût été démontrée pour les déformations des variétés localement plates, ce thórème de Jean-Louis Koszul, qui exprime la *non rigidité des structures localement plates hyperbolique*, aurait été formulé en terme de *non rigidité de structures algébriques*. En effet soit A la KV algèbre d'une structure localement plate hperbolique (M, ∇), il y a correspondence bijective entre les déformations de (M, ∇) et les déformations de la KV algèbre A. *La non rigidité de la KV algèbre A équivaut à la non nullité de deuxième espace de cohomologie* $H^2(A, A)$ *du KV complexe* $C^*(A, A)$.
La émonstration donnée par Jean-Louis Koszul répose sur des arguments de la topologie générale.

4. Theorie des modeles statistiques, versus Topologie-Geometrie de Koszul

Grâce aux travaux de Shima, Jean-Louis Koszul savait que *la géométrie hessiene a des connections inatendues.*
Shima fut peut-être le premier à écrire de manière explicite que presque tous les modèles statistiques largement utilisés par les statisticiens appliqués sont des familles exponentielles. En fait Shima montrait que les métriques de Fisher de ces modèles sont hessiennes.
De la KV cohomologie Albert Nijenhuis infera une fortune analogue; c'est à dire que la Topologie de Koszul (c'est à dire la KV homologie,) aurait des connections inattendues.
De connections de la géométrie hessienne dont j'ai connaissance, beaucoup ont une nature homologique. C'est ce dont j'avais entrepris de convaincre Jean-Louis Koszul. Sur le sujet Jean-Louis Koszul et moi avions chacun dans l'esprit une augure de Albert Nijenhuis que je transcris ci-dessous et que nous évoquions de manière allusive.

.. It is clear that Mr Boyom's work is just the begining of a new development. As it stands, it has few connections with existing theories. For example, how is Boyom cohomology related to the Hochschild version? I see a whole field of investigation opening up,... (Decmber 16, 2004. Alebert Nijehuis)

4.1. *Théorie classique des modèles statistiques*

On part d'un ensemble dénombrable (Ξ, Ω); Ω est une algèbre de Boole des parties de Ξ. Je vais rappeler la notion usuelle de modèle statistique.

Definition 4.1. Un modèle statistique de dimension n pour (Ξ, Ω) est un couple (Θ, P) dans lequel Θ est un ouvert de l'espace Euclidien $\mathbb{R}^n$ et P est une fonction

$$\Theta \times \Xi \ni (\partial, \xi) \to P(\partial, \xi) \in \mathbb{R}$$

Satisfaisant les conditions suivantes.
(1) $P(\partial, \xi)$ est différentiable en la variable ∂.
(2) Pour tout ∂ fixé le triplet $(\Xi, \Omega, P(\partial, -))$ est un espace probabilisé.
(3) Si $\partial \neq \partial*$ il existe ξ tel que $P(\partial, \xi) \neq P(\partial*, \xi)$.
L'information de Fisher de (Θ, P) est la forme bilinéaire symétrique g définie dans Θ par

$$g(\partial)(X, Y) = \Sigma_\xi P(\partial, \xi)X.log(P(\partial, \xi))Y.log(P(\partial, \xi)),$$

X et Y sont des champs de vecteurs dans Θ.
(4) L'information de Fisher g est définie positive.
Pour toute fonction $f(\partial,\xi)$ on écrit la sommation

$$\Sigma_{\xi}P(\partial,\xi)f(\partial,\xi)$$

sous forme d'inégration

$$\int_{\Xi}P(\partial,\xi)f(\partial,\xi)d\xi.$$

(5) Les opérations d'inégration par rapport à ξ et de différentiation par rapport à ∂ commutent.

En vertu de (4), le couple (Θ, g) est une structure de variété Riemannienne. En réalité la géomérie de l'information classique consiste pour l'essentiel en l'analyse non lnéaire dans l'espace métrique (Θ, d_g) où d_g est la distance determin'ee par le tenseur métrique g.

4.2. *Formalisme de Amari-Chentsov dans* (Θ, P)

Les manipulations qu'on va faire ne dépendent pas de l'axiome (4).
La suite $x_1,..,x_n$ sont les fonctions coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^n$. Pour tout nombre réel α et pour tout triplet i, j, k dans [1,n] on pose

$$\Gamma^{\alpha}_{i,j:k}(\partial)=\Sigma_{\xi}P(\partial,\xi)[[\frac{1+\alpha}{2}\partial_i ln(\partial,\xi)\partial_j ln(\partial,\xi)+\frac{1-\alpha}{2}\partial^2_{ij}ln(\partial,\xi)]\partial_k ln(\partial,\xi)]$$

Dans le membre à droite de la formule ci-dessus on a posé

$$ln(\partial,\xi)=log(P(\partial,\xi)),$$

$$\partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$\partial^2_{ij}=\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}.$$

Les fonctions $\Gamma^{\alpha}_{i,j:k}(\partial)$ sont les symbole de Christoffel d'une connexion de Koszul sans torsion dans la variété Θ. Cette connexion est notée ∇^{α}. La relation entre ∇^{α}, $\nabla^{-\alpha}$ et l'information de Fisher g est le formalisme de Amari-Chentsov: pour des champs de vecteurs X, Y et Z on a

$$(CJ):\quad X.g(Y,Z)=g(\nabla^{\alpha}_X Y,Z)+g(Y,\nabla^{-\alpha}_X Z).$$

Lorsque l'information de Fisher g est définie, alors la connexion $\nabla^{-\alpha}$ est uniquement définie par ∇^{α}. La relation ci-dessus montre que le tenseur g est invariant par la connexion

$$\nabla^0=\frac{\nabla^{\alpha}+\nabla^{-\alpha}}{2}$$

En vertu de (4), ∇^0 est la connexion de Levi-Civita de (Θ, g). Il faut observer que les définitions de g, de ∇^{α} sont indépendantes. J'observe que la relation de connection (CJ) dépend uniquement de la définition de g et de ∇^{α}. De cette observation résulte que l'information de Fisher est toujours de rang constant.

Lorsque l'information de Fisher n'est pas définie, alors son noyau est un feuilletage Riemannien. Dnas ce cas la Géométrie de l'infomrtaion et la topologie de l'information sont *la géométrie et la topologie transverses des feuilletages Riemanniens. Cela est une connection entre la géométrie de l'information et la topologie différentielle.*

4.3. *Trois critiques de la théorie classique des modèles statistiques*

(c.1) Première critique: La théorie classique des modèles statistiques exclut des variétés compactes dont les plus simples dont S^1 et $[0, 1]$.
(c.2) Deuxième critique : L'axiome d'identifiabilité, c'est à dire (3), manque de pertinence sous la perspective de la fibration

$$p_1 : \Theta \times \Xi \ni (\partial, \xi) \to \partial \in \Theta.$$

(c.3) Troisième critique: Par l'axiome (4) la théorie classsique exclut du champ de la géométrie de l'information des modèles dont l'information de Fisher est non définie. Cet axiome obscurcit des riches connections entre la géométriede l'information et la topologie différentielle. En particulier elle ignore des connections entre la géométrie de l'information et la géométrie- topologie transverse des feuilletages Riemanniens.

Je rappelle que mon objectif est d'éclairer des impacts de la Géométrie de Koszul sur des thématiques de la mathématique appliquée. Je vais souligner des impacts notables sur des sujets porteurs que sont la topologie et la géométrie de l'information. Jean-Louis Koszul s'est fortement intéressé à ces impacts à partir des années 2011-2012.

4.4. *Topologie-Géométrie de Koszul et la théorie des modèles statistques revisitée*

Dans ce paragraphe, je vais rappeler le renouvellement de la théorie des modèles statistiques. Les outils utilisés pour ce renouvellement sont la Topologie et la Géométrie de Koszul. Beaucoup d'idées sont des fruits des commentaires de Jean-Louis Koszul. Au début, certains commentaires furent empreints de scepticisme qui débuta de s'atténuer lorsqu'entra en scène la théorie de KV homologie (, construite pour étudier les déformations des variétés localements plates, c'est à dire pour résoudre la conjecture de Gerstenhaber).
Au départ mes propos se focalisaitent sur des connections mettant en jeu la théorie de représentations affines des groupes des transformations mesurables, aussi nommé groupes de statistiques efficientes (voir Amari-Nagaoka). Je vais rendre cela plus précis dans la suite.
La théorie de représentations affines des groupes de Lie possède des nombreuses connections dont celle avec la Géométrie des domaines bornés et les algèbres de Koszul-Vinberg. Ici je limite l'attention aux connections qui sont utilisées pour renouveler la théorie des modèles statistiques.
J'avais auparavant informé Jean-Louis Koszul des insuffisances dans la théorie classique des modèles statistiques ainsi que des lacunes géométriques et topologiques. Ces lacunes obscurcissent des problèmes intéssants. A titre d'illustration, un problème qui n'est étudié nulle part dans la théorie classique est le problème de l'espace de module des classes d'isomorphismes des modèles statistiques.
Ceci est l'occasion d'un clin d'oeil à l'histoire de la théorie des représentations affines et ses rapport aux mathématiques appliquées. Un passage du courrier de Jean-Louis Koszul du 20 Mars 2016:

... Pour ce qui est des représentaions affines, je ne suis pas le premier à en avoir manipulé(es). Si j'ai bon souvenir, elles interviennent dans le travail des russes sur les domaines bornés.. A Part cela, cet article de Barbaresco contient bien des choses que j'aimerais comprendre. Je vais essayer de m'y frotter. (J-L Koszul)

Je vais rappeler deux formulations de la théorie renouvelée des modèles statistiques. Les deux formulations ont pour cadre la catégorie des fibrations localement triviales aux dessus des variétés localement plates. Ces formulations diffèrent par la nature de leur fonction caractéristique.
Au passage j'attire l'attention sur le fait que parmi les objectifs de renouvellement, il y a celui de lever les critiques (c.1), (c.2) et (c.3) qui sont exprimées dans le sous-paragraphe précédent.

(r.1) Dans la première formulation de la théorique des modèles statistiques, la fonction caractéristique d'un modèle est une fonction densité des probabilités; cette fonction est notée p.
(r.2) Dans la seconde formulation de la théorie des modèles statistiques, la fonction caractéristique d'un modèle est une fonction (aléatoire) à valeurs dans l'espace des 2-cocycles scalaires de la base du fibré. Un tel 2-cocycle est symétrique, semi-défini positif; cette fonction est notée Q.

4.5. *Fibrations mesurables*

On désigne par Γ le groupe des transformations mesurables d'un l'ensemble mesurable (Ξ, Ω). C'est l'ensemble des statistiques efficients dans (Ξ, Ω). On fait l'hypothèse que l'action de Γ dans Ξ est transitif.
On fixe une varitété localement plate de dimension n, (M, ∇) munie d'une opération de Γ.
On fixe une représentaion affine de Γ dans $\mathbb{R}^n$.
Grosso modo on travaille avec des données ayant la forme $[\mathcal{E}, \pi, M]$ ainsi constituées:

(m.1): π est une fibration Γ-équivariante localement triviale de $\mathcal{E}$ dans M, et la fibre type de π est Ξ.
Ce qui signifie que les lois d'opérations de Γ dans $\mathcal{E}$ et dans M obéissent à la relation

$$\pi(\gamma.e) = \gamma.\pi(e).$$

(m.2) On appelle carte locale de cette fibration une application Γ-équivariante qui envoie une trivialisation locale

$$[\mathcal{E}_U, \pi, U] \subset [\mathcal{E}, \pi, M]$$

sur

$$[\Theta \times \Xi, p_1, \Theta] \subset [\mathbb{R}^n \times \Xi, p_1, \mathbb{R}^n];$$

p_1 est la projection sur le premier facteur et Θ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Il est clair que chaque fibre de π possède canoniquement une structure d'ensemble mesurable dont l'algèbre de Boole est l'image inverse de Ω par une carte locale.

Dans l'étape suivante, on adjoint à la fibration $[\mathcal{E}, \pi, M]$ une fonction Γ-équivariante p définie dans $\mathcal{E}$. On obtient un quadruplet

$$\mathbb{M} = [\mathcal{E}, \pi, M, p]$$

Definition 4.2. On note $\mathbb{M}(p)$ l'ensemble des propriétés $\mathbb{M}.j$ suivantes.
$\mathbb{M}.1$: La restriction de p à chaque fibre de π y définit une structure d'espace de probabilisé.
$\mathbb{M}.2$: La fonction p est horizontalement différentiable. C'est à dire que dans une carte lcale (∂, ξ) la fonction $p(\partial, \xi)$ est différentiable par rapport à ∂.
$\mathbb{M}.3$: Les opérations de sommation lelong des fibres de π, $\Sigma_{e\in\mathcal{E}_x}$ et de différentiation horizontale commutent.

Definition 4.3. Une donnée

$$\mathbb{M} = [\mathcal{E}, \pi, M, p]$$

qui jouissent des trois propriétés $\mathbb{M}.1$, $\mathbb{M}.2$, $\mathbb{M}.3$ est appelée un Modèle Statistique Fonctionnel de dimension n pour (Ξ, Ω). La fonction p est appelé la densité des probabilités du modèle.

Grosso modo, un modèle statistique pour (Ξ, Ω) est un fibré en espaces probabilisés localement trivial au dessus d'une variété localement plate (M, ∇)
On convient d'écrire la sommation lelong des fibres de π sous la forme de l'intégration, c'est à dire

$$\Sigma_{e\in\mathcal{E}_x} = \int_{\mathcal{E}_x}$$

L'information de Fisher de $[\mathcal{E}, \pi, M, p]$, g est définie au point $x \in M$ par

$$g(x) = -\int_{\mathcal{E}_x} p(e)[\nabla^2(log(p)](e)$$

La donnée $[\mathcal{E}, \pi, M, p]$ définit dans M la forme bilinéaire symétrique aléatoire

$$Q_p(\nabla) = \nabla^2 log(p).$$

En vertu de $\mathbb{M}(p)$ le membre de droite de l'égalité ci-dessus ne souffre pas d'ambiguité.
Par l'intégration lelong des fibres de π, je définis la forme bilinéaire

$$g(x) = -\int_{\mathcal{E}_x} [p(e)Q_p(\nabla)(e)];$$

cette forme $g(x)$ est appelée l'information de Fisher du modèle $[\mathcal{E}, \pi, M, p]$.

Dans des coordonnées affines locales de (M, ∇) les symboles de Christoffel des connexions de Amari-Chentsov, $\Gamma^{\alpha}_{i,j:k}(x)$ sont définis comme dans la théorie classique des modèles statistiques. On peut utiliser des fonctions partition de l'unité pour définir globalement les α-connexions ∇^{α}. Je viens de renouveler la théorie des modèles statistiques formulée dans le cadre des fibrations localement triviales au-dessus des variétés localement plates. L'information de Fisher y apparait comme espérance mathématique du KV cobord aléatoire

$$\delta(\frac{\partial log(p)}{\partial\partial}).$$

Cette lecture met en lumière l'impact de la Topologie de Koszul, c'est à dire l'impact de la KV cohomologie de (M, ∇). Cette perspective sera éclaircie dans de la section suivante.

4.6. *Module des classes d'isomorphimes des modèles statistiques fonctionnels*

Un isomorphisme entre deux modèles est sous-tendu par un isomorphisme equivariant entre les deux fibrations sous-jacentes. Il n'y a donc pas perte de généralité si on se limite aux structures de modèles dans une même fibration

$$\mathbb{M} = [\mathcal{E}, \pi, M].$$

L'objectif est la recherche d'un invariant qui code les classes d'isomorphisme des structures des modèles statistiques dans $\mathbb{M}$.
La catégorie des structures de jauge dans M est noté $\mathcal{K}(M)$. Soit $[\mathcal{E}, \pi, M, p]$ une structure de modèle statistique (fonctionnel) dans le fibré $[\mathcal{E}, \pi, M]$. On désigne par $\mathcal{H}ess(M)$ la catégorie des structures hessiennes (,éventuellement singulières,) dans M.
On définit le foncteur Q_p de $\mathcal{K}(M)$ dans $\mathcal{H}ess(M)$ par

$$\mathcal{K}(M) \ni D \to Q_p(D) = D^2 log(p) \in \mathcal{H}ess(M).$$

Je rappelle que la forme bilinéaire $D^2 log(P)$ est éfinie par la formule suivante; pour des champs de vecteurs X et Y on a

$$D^2 log(p)(X, Y) = X.(Y.log(p)) - D_X Y.log(p).$$

Theorem 4.4. *Le foncteur $D \to Q_p(D)$ code les points de l'espace de module des classes d'isomorphisme de structures des modèles statistiques fonctionnels dans le fibré* $[\mathcal{E}, \pi, M]$

Par ce théorème l'application $Q_p(D)$ code également les classes d'isométrie des informations de Fisher, donc, elle code la géometrie de l'information classique.

5. Théorie homologique des modèles statistiques

Dans la section 3.6 ci-dessus j'ai rendu clair que la théorie classique des modèles statistiques est une trivialisation locale de la théorie renouvelée. D'un autre côté on s'est débarrassé des axiomes (a.1), (a.2) et (a.3) que je rappelle:
(a.1) La variété sous-jacente à un modèle est un ouvert Θ d'un espace euclidien.
(a.2) $\partial \neq \partial *$ entraine $P(\partial, -) \neq P(\partial *, -)$.
(a.3) L'information de Fisher est définie positive.
Se débarasser de (a.3) conduit à des connections entre la géométrie de l'information et la géométrie transverse des feuilletages Riemanniens.

5.1. *Métriques hessiennes aléatoires*

Soit A la KV algèbre de (M, ∇) et $Z^2_S(A)$ l'espace des 2-cocyles symétriques du KV complexe de A à coefficients dans le A-module à gauche $C^\infty(M)$. Les métriques hessiennes sont des 2-cocycles (scalaires) non dégénérés.

On retourne aux données de forme $[\mathcal{E}, \pi, M]$.
On note Q une application qui envoie $e \in \mathcal{E}$ en $Q(e) \in S^2(M)(\pi(e))$. Ici $S^2(M)(\pi(e))$ est l'espace de formes bilinéaires symétriques dans l'espace vectoriel $V = T_{\pi(e)}M$.

(s.1) : Q est semi-définie positive si pour tout e et tout v dans V on a

$$0 \le Q(e)(v, v).$$

(s.2) : Q est définie positive si pour tout vecteur non nul $v \in T_xM$, il existe e dans la fibre au-dessus de x, c'est à dire $e \in \mathcal{E}_x$, tel que

$$0 < Q(e)(v, v).$$

(s.3) : Q est horizontalement différentiable, c'est à dire que dans un domaine de trivialisation par une carte locale de $[\mathcal{E}, \pi, M]$ et d'expression locale

$$Q(e) = Q(\partial, \xi),$$

le membre de droite est différentiable par rapport ∂.
(s.4) : Le rang de Q au point $x \in M$ est défini par

$$rg(Q)(x) = Max_{e \in \mathcal{E}_x} rg(Q(e)).$$

Definition 5.1. Un quadriplet $[\mathcal{E}, \pi, M, Q]$ dont l'application Q jouit des propriétés (s.1), (s.2), (s.3) est appelée une métrique hessienne aléatoire si

$$\delta Q = 0,$$

c'est à dire que Q est un cocycle aléatoire de A à coefficients dans $C^\infty(M)$.

Retournos au cas général d'une fibration $[\mathcal{E}, \pi, M]$ dont l'espace total $\mathcal{E}$ est le domaine d'une application Q à valeurs dans l'espace $S^2(M)$ des formes bilinéaires symétriques dans M

Definition 5.2. Un quadruplet

$$\mathbb{M}_Q = [\mathcal{E}, \pi, M, Q]$$

représente un modèle statistique homologique pour (Ξ, Ω) si l'application Q est un KV cocycle (symétrique) semi-défini positif de rang constant.

Je rappelle que les automorphismes de $[\mathcal{E}, \pi, M]$ ont la forme des paires (Φ, ϕ) couplées par

$$\pi \circ \Phi = \phi \circ \pi$$

La classe cohomologie aléatoire d'un modèle homologique est notée $[Q]$.

Definition 5.3. Un automorphisme de $[\mathcal{E}, \pi, M]$, (Φ, ϕ) est appelé un isomorphisme de $\mathbb{M}_{Q_1}$ dans $\mathbb{M}_{Q_2}$ si Q_1 et $Q_2 \circ \Phi$ sont cohomologues.

On peut lire un résentant de modèle homologique, $[\mathcal{E}, \pi, M, Q]$ comme une métrique hessienne aléatoire singulière dans (M, ∇).

Definition 5.4. Le quadriplet $[\mathcal{E}, \pi, M, [Q]]$ est appelé un modèle statistique homologique de dimension m.

5.2. *Une lecture combinatoire des modèles homologiques. Arbres enracinés.*

J'ai introduit deux types de renouvellement de la théorie classique des modèles statistiques. La théorie des *modèles statistiqes fonctionnels* et celle des *modèles statistiques homologiques*. La théorique classique est, d'une part une trivialisation locale de la *théorie fonctionnelle*, d'autre part un phénomène de nullité homologique locale dans la *théorie des modèles statistiques homologiques*. Cependant la théorie fonctionnelle est subordonnée à la théorie homologique. Elle est en fait un *théorème de nullité homologique globale*.
La théorie des modèles statistques homologiques possède *deux niveaux de trivialisation*.

(T.1) Au premier niveau la *KV Trivialisation de* $[\mathbb{M}_Q]$ signifie la nullité de la classe de cohomologie $[Q]$. Il existe alors une 1-forme différentielle (aléatoire) de Rham fermée ω telle que

$$Q = \delta\omega.$$

Si Q est défini positif alors le triplet (M, Q, ∇) est une structure de variété localement plate hyperbolique. Ainsi la géométrie de la base d'une structure de modèle statistique homologique *KV trivial* est une géométrie de Koszul.
(T.2) Le second niveau de trivialivialité d'un modèle *KV trivial* est la nullité de la classe de *de Rham* $[\omega]$. Alors 1-forme ω possède une primitive h qui est globalement définie dans l'espace total $\mathcal{E}$. On suppose que h est faiblement Jensen (voir la Définition 4.5) alors on applique les manipulations déjà mensionnées pour munir $[\mathcal{E}, \pi, M]$ de la structure de modèle statistique fonctionnel $[\mathcal{E}, \pi, M, p]$. Je signale que la fonction densité des probabilités p est définie à l'aide d'une structure (auxiliare) de fibration mesurée $[\mathcal{E}, \pi, M, \mu]$,

$$p(e) = \frac{exp(h(e))}{\int_{e^* \in \mathcal{E}_{\pi(e)}} exp(h(e^*)) d\mu(e^*)}.$$

Il est maintenant clair que tout modèle statistique fonctionnel dérive d'un modèle statistuqe homologique par ce procédé de trivialisation à deux niveaux $T.2 \circ T.1$ J'ai motré comment la théorie classique des modèles statistiques dérive de la théorie (par trivialisation) de la théorie des modèles statistiques fonctionnels. Ce procédé est noté T.0

5.3. *Topologie-Géométrie de Koszul-Nature homologique de la Géométrie de l'Information*

Par des manipulations du classique lemme de Poincaré on montre que localement le cocycle Q a la forme

$$Q = \nabla^2 h$$

C'est à dire que localement le cocycle Q est exact. Ci-dessus h est une fonction horizontalement différentiable définie dans

$$\mathcal{E}_U = \pi^{-1}(U),$$

U est un ouvert de M.
Ce qui précède montre au passage que la base de tout modèle statistique homologique dont le cocycle est défini positif est localement une variété localement plate hyperbolique.
Pour s'en convaincre on travaille dans l'image $(\Theta \times \Xi)$ de $\pi^{-1}(U)$ par une carte locale de $[\mathcal{E}, \pi, M]$.

Definition 5.5. Une fonction $h(\partial, \xi)$ définie dans $(\Theta \times \Xi)$ est faiblement de Jensen si l'ensemble mesurable (Ξ, Ω) porte une mesure μ telle que $h(\partial, \xi)$ satisfasse les conditions suivantes

$$(Jen1): \quad h(\partial, \xi) \leq log(\int_{\Xi} exp(h(\partial, \xi^*)) d\mu(\xi^*)).$$

Pour tout $\partial \in \Theta$, $(\Xi, \Omega, P_\partial)$ est un espace probabilisé; ici

$$(Jen2): \quad P_\partial(\xi) = \frac{exp(h(\partial, \xi))}{\int_{\Xi} exp(h(\partial, \xi^*)) d\mu(\xi^*)}.$$

Ainsi le couple (Θ, P) est un modèle statistique classique pour (Ξ, Ω).
On note $[Q_U]$ la classe de cohomologie de la restriction

$$\mathbb{M}_U = [\mathcal{E}_U, \pi, U, Q_U]$$

On a alors

$$[Q_U] = 0.$$

A partir de maintenant je concentre l'attention sur les 2-cocyles qui sont localment faiblement de Jensen, c'est à dire que chaque $x \in M$ possède un voisinage ouvert au-dessus du quel il existe une fonction faiblement de Jensen, h telle que

$$Q = \nabla^2 h.$$

Une perspective homologique consiste à regarder $\mathbb{M}_U$ comme un *théorème* de nullité (homologique) *local* de la classe de cohomologie $[Q]$.
Ainsi les modèles statistiques homologiques sont localement triviaux et leurs trivialisations locales sont des modèmes statistiques classiques.
On assemble ces dernières considérations, en apparence assez abstraites, avec l'opérateur bord construit par Jean-Louis Koszul dans $A^{\otimes p+1}$, c'est à dire

$$d_{KV} = \Sigma_{r \neq i} \Sigma_{i=1,\ldots,p} (-1)^i d_{r,i}.$$

On obtient alors une formulation homologique de la théorie des modèles statistiques qui est susceptible de se préter aux méthodes numériques. Un sujet au quel Jean-Louis Koszul s'est beaucoup intéressé après GSI 2013.
A cette étape une évidence est que la théorie classique des modèles statistiques (dont une référence est le monographe de Amari-Nagaoka) est un Théorème de nullité homologique locale (dans des modèles statistiques homologiques). Je termine par une conclusion qui s'en dégage.
J'ai mentionné les trois procédés de trivialisation T.0, T.1, T.2 que j'ordre ainsi

$$T.0 < T.1 < T.2.$$

Ce qui met en lumière que la *Théorie Classique des modèles statistique* est une trivialisation de la *Théorie Fonctionnelle des Modèles Statistques* qui est à son tour une trivialisation de la *Théorie Homologique des Modèles Statistiques*.

Ainsi *La Géométrie des Modèles Statistique Procède de la Théorie Homologique au dessus de la Géométrie de Koszul.*

Les procédés T.o, T.1, T.2 éclairent la richesse de la *Théorie des Modèles Homologiques*.
En voici une ébauche.
(i) D'un modèle homologique $[\mathcal{E}, \pi, M, [Q]]$ on peut tirer plusieurs représentants, c'est à dire plusieurs cocycles Q qui sont semi définis positifs.
(ii) Au dessus de chaque point de M un représentant $\mathbb{M}_Q$ a plusieurs primitives locales, c'est à dire des 1-formes différentielles locales ω telles que

$$Q = \delta\omega$$

(iii) Par le lemme de Poincaré, chaque 1-forme possède plusieurs primitives locales, c'est à des fonctions locales horizontalement différentiables, h telles que

$$\omega = d_{dR} h,$$

et chaque primitive faiblement Jensen, h donne lieu à une fonction densité de probabilités

$$p(e) = \frac{exp(h(e))}{\int_{\mathcal{E}_{\pi(e)}} exp(h(e^*))d\mu(e^*)}.$$

Soit g_p l'information de Fisher de la densité de probabilités p:

$$g_p(x) = -\int_{\mathcal{E}_x} p(e)(\nabla^2 log(p))(e).$$

5.4. *Nature combinatoire de la Géométrie de l'information*

Sous les procédés de trivialisation qui sont introduits à la sous-section ci-dessus, l'information de Fisher apparaît comme une feuille de l'arbre enraciné en la classe de cohomologie $[Q] \in H^2_{KV}(A, C^\infty(M))$, c'est à dire que l'on grimpe de la racine [Q] à une feuille g_p en suivant les branches ci-dessous décrites.

$$[Q] \to Q \to \omega \to h \to p \to g_p$$

Les flèches vers la droite ont signifient les manipulations suivantes:

(a1): $[Q] \to Q :\leftarrow [\mathcal{E}, \pi, M, Q]$ représente le modèle homologique dont la classe est [Q],

(a2): $Q \to \omega : \quad Q = \delta\omega : \leftarrow \delta - Lemme$ de Poincaré.

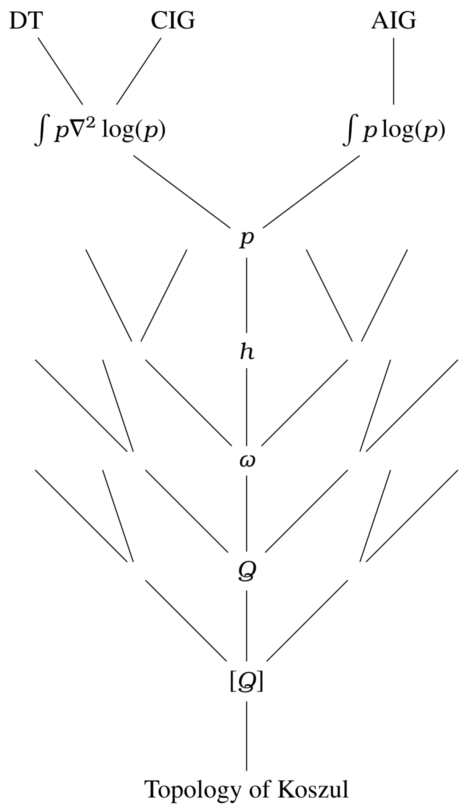
(a3): $\omega \to h : \quad \omega = d_{dR}h: \leftarrow d_{dR} - Lemme$ de Poincaré.

(a4): $h \to p : \quad p(e) = \frac{exp(h(e))}{\int_{\mathcal{E}\pi(e)} exp(h(e^*))}$:← Théorie fonctionnelle des modèles staistiques.

(a5) $p \to E : \quad E(x) = \int_{\mathcal{E}_x} p(e)log(p(e))$:← Entropie du représentant $\mathbb{M}_Q$, Géometrie de l'information appliquée (AIG).

(a6): $p \to g_p : \quad g_p(x) = -\int_{\mathcal{E}_x} p(e)\nabla^2 log(p(e))$:← Théorie classique des modèles statistiques (CIG) et topologie differentielle (DT)

Proposition 5.6. *Un modèle statistique homologique $[\mathcal{E}, \pi, M, [Q]]$ est localement un arbre enraciné dont la racine est la classe de cohomologie $[Q]$ et dont les feuilles sont les informations de Fisher g_p.*



Ainsi est mise en pleine lumière la suprématie de la Théorie des Modèles Statistiques Homologiques. En même temps, la proposition 4.6 répond à la problématique de Peter McCullagh: *What is a statistical model?* Et à celle de Misha Gromov: *On Search of structure, Entropy, the Fisher information*

La Géométrie de l'Information a une nature homologique.

En fait, aller de la classe de cohomologie [Q] à une information de Fisher g_p peut être vu comme un algorithme combinatoire à la Nijenhuis-Wilf, (cf Albert Nijenhuis and Wilf Herbert: (a) Combinatorial algorithms, Academic Press 1975; (b) Combinatoriel algorithms for computers and calculators, Academic Press 1978.)
A l'exception des deux derniers procédés (a5) et (a6) les autres ont une nature homologique. Les manipulations (a5) et (a6) sont basées sur des opérations d'intégration. Ceci éclaire a postoriori la problématique de Koszul-Nijenhuis, c'est à dire modifier l'écriture de l'opérateur (cobord) brutal δ de sorte que l'on puisse *démontrer par recurrence* que $\delta \circ \delta = 0$. (cf Nijenhuis-Wilf.)

Cette note ne contient pas des démonstrations détaillées des théorèmes. Elle est consacrée au survol des apports de la Géométrie de Koszul et de la Topologie de Koszul à la géométrie de l'information. Cette partie de l'oeuvre de Jean-Louis Koszul écclaire l'influence de la

Géométrie différentielle et de la Toplogie différentielle sur la science statistique. Ce faisant, je n'ai fait que prolonger en les enrichissant, les travaux novateurs de Shi Ichu Amari qui honora GSI2013 d'une conférence plénière. J'ai voulu en même temps éclairer et établir les efforts d'attention de Jean-Louis Koszul sur cet autre volet des influences de ses découvertes.
Un panorana d'autres connections topologiques de la Géométrie de l'Information est l'objet de l'article <*Foliations-Webs-Hessian Geometry-Information Geometry-Entropy and Homology*> (voir bibliographie ci-dessous).

References

[Alekseevsky] Alekseevsky D. : Vinberg's theory of homogeneousconvex cones: developments and applications. in Transformation groups 2017. Conferences dedicated to Professor Ernest B. Vinberg on the accasion of his 80 th birthday, Moscow , December 2017.

[Amari] Amari S-I. : Differential Geometry in Statistics. Lecture Notes in Statistics 28 Springer Verlag, NY 1990.

[Amari-Armstrong] Amari S-I and Armstrong J. : Curvature of Hessian Manifolds. in Diff Geom.Appl 33 (2014) 1-12.

[Amari-Nagaoka] Amari S-I and Nagaoka H. : Methods of information geometry, Translations of Mathematical Monographs. AMS-Oxford vol 191.

[Amari-Armstrong] Amari S-I and Armstrong J. : The Pontryagin Forms in Riemannian Geometry, Geometric Science for Information 242-247. in Lecture Notes in Computer Science;9389 Springer. Cham 2015

[Arnaudon-Barbaresco] Arnaudon M. and Barbaresco F. : Median and means in Riemannian Geometry; The existence, uniqueness and computation. in Matrix Information Geometry: Springer , Heidelberg Germany 2013, 169-197.

[Arnaudon- Nielsen] Arnaudon M and Nielsen F. : Medians and means in Fisher geometry. in LNS. J. Comput Math 2012, (15), 23-37.

[B-N] Barndorff -Nielsen O.E. Information and exponential families in statistical theory, Wiley, New York

[Barbaresco] Barbaresco F. : Koszul Information Geometry and Souriau geometric temperature/capacity of Lie group thermodynamics. in Entropy 16 (2014) 4521-4565

[Barbaresco] Barbaresco F. : Koszul Information Geometry and Souriau Thermodynamics, AIP Conference Proc. in Proc of MaxEnt 14, (74) 2015

[Barbaresco] Barbaresco F. : Symplectic structure of information geometry: Fisher metrics and Euler-Poincaré equation of Souriau Lie group thermodynamics. in GSI 2015, Springer LNCS vol 9389, 529-540

[Barbaresco] Barbaresco F. : Geometric theory of Heat from Souriau Liegroup thermodynamics and Koszul Hessian geometry. Information geometry for exponential families Proc GSI2015. in Entropy 18 (2016)

[barbaresco] Barbaresco F. : Les densités de probabilité distinguées et l'équation de Clairaut: Frechet et Koszul. in GRETS2017.

[Barndorff-Nielsen] Information and exponential families. Statistical Theory,Wiley New York, NY USA 1978

[BB] Baudot P. and Bennequin D. : The homological nature of entropy. in Entropy Special Issue GSI 2015

[Berger] Berger M. : Les espaces symétriques noncompacts. in Ann Sci Ec Norm Sup, 74 (3) 1957 85-177

[Byande] Byande P-M: De structures affines à la géométrie de l'information. La notion de T-plongement. Edition Omniscriptum (2011).

[Cartan] Cartan E. : Sur les domaines bornés de l'espace de n variables, complexe. in Abh. Math. Hambourg 11, 116-162

[Cartan] Cartan E. : La théorie des groups finis et continus I. in Analysis Situs, Mémorial des Sciences Mathématiques vol 42.

[Cartan] Cartan E. : Sur les variétés à connexions affines et la th''eorie de relativité générale. in Ann Sci Ec Norm Sup (1): 40 (1923) 325-412; (2): (1924) 1-25; 42 (1925) 17-88.

[Cheva-Eil] Chevalley C. and Eilenberg S. : Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras. in Trans Amer Math Soc (63) 1948, 85-124

[Gerstenhaber] Gerstenhaber M. : Deformation of Rings and Algebras. in Ann of Math 79 (1964) 59-103

[FGH] Fired D., Goldman W. and Hirsh M. : Affine Mnifolds with nilpotent holonomy. in Comment Helv Math 56 (1983) 487-523

[Gindikin] Gindikin SG. : Analysis in homogeneous domains. in Russian Math Survey vol 19 (4) 1964, 1-89

[GPSV] Gindikin SG., Piatecci-Shapiro I.I. and Vinberg E.B. : Homogeneous Kaehler Manifolds,in Geometry of bounded Domains. in CIME III, Circlo Urbino. Ed Cremorese Roma (1968) 3-87

[Gui-Stern] Guillemin V. and Sternberg S. : An algebraic model for transitive differentil geometry. in Bull Amer Math Soc (70) 1964,16-47

[Gromov] Gromov M. : The search of structure Part I. Entropy. in Proc. CEMS6 Krakow (2012)

[Gromov] Gromov M. : On the structure of Entropy. in MaxEnt 2014, Proc; Amer institute of Physics

[Hochschild] Hochschild G. : On the cohomology groups of an associative algebra. in Ann. Math (46) 1945, 153-166

[Kodaira] Kodaira K. : Complex manifolds and deformation of complex structures. in Springer Verlag

[Katsumi] Katsumi Y. : On Hessian structure on affine manifolds. in Manifolds and Lie Groups in Honour of Yozo Matsushima, Progress in Mathhematics, vol 114, 449-459

[Kaup] Kaup M. : Hyperbosche komplexe Rume. in Ann Institut Fourier 18 (1968) 303-330

[Koszul] Koszul J-L : Homologie et cohomologie des algèbres de Lie. in Bull Soc Math France (78) 1950,1-63
[Koszul] Koszul J-L. : Sur la forme hermitienne canonique des espaces homogènes complexes. in Can.J. Math (7) 1955, 562-576.
[Koszul] J-L Exposés : Sur les espaces homogènes symétriques. in Publ da Soc. de Mat. de $S\tilde{a}o$ Paulo, Brazil 1959.
[Koszul] J-L : Domaines bornés homogènes et orbites des groupes de transformations affines. in Bull Soc Math France 89 (1961) 515-533
[Koszul] Koszul J-L : Ouverts convexes homogènes des espaces affines. in Math Z, (79) 1962 254-259
[Koszul] Koszul J-L : Variétés localement plates et convexité. in Osaka J. Math (2) 1965, 285-290
[Koszul] Koszul J-L : Lectures on groups of transformations. in Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1965.
[Koszul] Koszul J-L : Déformations des variétés localement plates. in Ann Inst Fourier (18) 1968, 103-114.
[Koszul] Koszul J-L : Trjectoires convexes des groupes affines unimodulaires. in essays on Topology and Related topics; Springer : Berlin, Germay 1970 105-110
[Koszul] Koszul J-L : Introduction to symplectic Geometry. in Science Press, beijing, (1986) (en chinois), Version en anglais Edition Springer (en cours)
[Koszul] Koszul J-L : Sur les algèbres de Vinberg. Lectures Notes, Université de Gen'eve (1968)
[Koszul] Koszul J-L : Connexions hyperboliques et et Déformations. in Symposium Math 11 357-361
[Koszul] Koszul J-L : Homologie des complxes de formes différentielles d'ordre supérieur. in Ann Sci Ec. Norm Sup (7) 1974, 139-153
[Kurose] Kurose T. : Dual connections and affine geometry. in Math Z. (203) 1990, 115-121
[Loday] Loday J-L : Une version non commutative des algèbres de Lie: Les algèbres de Leibniz. in Enseignement Mathem (39) 1993, 269-293
[Loday] Loday J-L : Kuneth-style formula for homology of Leibniz algebras. in Math Z. (221) 1996, 41-47
[Nguiffo Boyom] Nguiffo Boyom M. : Sur les structures localement plates isotopes à zéro. in Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Science (20) 1993, 91-131
[Nguiffo Boyom] Nguiffo Boyom M. : Cohomology of Koszul-Vinberg algebroids and Poisson manifolds. in Banach Centre Publications (54) 2001, 99-110
[Nguiffo Boyom - Wolak] Nguiffo Boyom M. and Wolak R. : Affine structure and KV cohomology. in Journal of Geom and Phys. (42) 2002, 307-317
[Nguiffo Boyom-Wolak] Nguiffo Boyom M. and Wolak R. : Local structure of Koszul-Vinberg andLie Algebroids. in Bull Science Math (128) 2004, 467-479
[Nguiffo Boyom] Nguiffo Boyom M. : KV cohomology of Koszul-Vinberg algebroids and Poisson manifolds. in Int J. Math (16) 2005, 1033-1061
[Nguiffo Boyom] Nguiffo Boyom M. : The Cohomology theory of Koszul-Vinberg Algebras. in Pacific J. Math (225) 2006, 119-153
[Nguiffo Boyom-Byande] Nguiffo Boyom M. and Byande PM. : KV Cohomology in the Information Geometry. in Matrix Information Geometry, Springer : Heidelberg, Germany 2013, 69-92
[Boyom-Byande-Ngakeu-Wolak] Nguiffo Boyom M. Byande PM, Ngakeu F. and Wolak R. : KV cohomology and differential geometry of affinely flat manifolds: Information Geometry. in Afr Diaspora J. Math (14) 2012, 197-226
[Nguiffo Boyom] Nguiffo Boyom M. : Transversely Hessian foliations and Information Geometry I. in Amer Inst. Physi. Proceeding (1641) 2014, 82-89
[Nguiffo Boyom-Wolak] NguiffoBoyom M. and Wolak R. : Transverse Hessian metrics in Information Geometry. in MaxEnt2014 AIP Conference, Proc AIP 2015
[Nguiffo Boyom-Wolak] Nguiffo Boyom M. and Wolak R. : Transversely Hessian foliations in Information Geometry. in Intern J. Math (2016).
[Nguiffo Boyom] Nguiffo Boyom M. : Foliations-Webs-Hessian Geometry-Information Geometry-Entropy and KV homology. in Entropy vol 18, (12) 2016, 433
[Nguiffo Boyom] Nguiffo Boyom M. : Numerical Properties of Koszul connections. in arXv 1708-01106 3 aug 2017
[Nijenhuis] Nijenhuis A. : Sur une classe de Propriétés communes à quelques types différents d'algèbres. in Enesihn Mathem (14) 1968, 225-277
[Nij-Rich] Nijenhuis A. and Richardson W. : Commutative algebra cohomology and deformation of Lie algebras and associative algebras. in J. Algebra (9) 1968, 42-53.
[Nij-Wil] Nijenhuis A. and Wilf H. : Combinatorial algorithms, Academic Press 1975.
[Nij-Wil] Nijenhuis A. and Wilf H. : Combinatorial algorithms for computers and calculators, Academic Press 1978.

[Pyatetskii-Shapiro] Pyatetskii-Shapiro I.I. : On a problem of Elie Cartan. in Dokl Akad nauk sssr (124) 1959 272-273

[Rothaus] Rothaus O.S. : The construction of homogeneous convex cones. in Annals of Math (2) vol 83 1966, 358-376

[Shima] Shima H. : Symmetric spaces with invariant locally Hessian structures. in J. Math Soc Japan, 1977 581-589

[Shima] Shima H. : Homogeneous Hessian manifolds. in Ann Inst Fourier 1980, 81-128

[Shima] Shima H. : Vanishing theorems for compact Hessian manifolds. in Ann Inst Fourier 1986,183-205

[Shima] Shima H. : Harmonicity of gradient mapping of level surfaces in a real affine space. in Geometriae Dedicata 1995, 177-184

[Shima] Shima H. : Hessian manifolds of Hessian constant curvature. in J Math Soc Japan 1995, 735-753

[Shima] Shima H. : Homogenous spaces with invariant projectively flat affine connections. in Trans Amer Math Soc 1999, 4713-4726

[Shima] Shima H. : The Geometry of Hessian structures, World Scizntific 2007

[Shima] Shima H. : Geometry of Hessian structures. in Sprinher Lectures Notes in Computer Science, vol 8085, F. Nielsen and F. Barbaresco (Edts) 2013, 37-55

[Visentini] Visentini E. : Geometry of homogeneous bounded domains. in Springer-Verlag (CIME, Ed. Cremonese,Roma 1968).

[Vey] Vey J. : Sur une notion d'hyperbolicité des variétés localement plates, Thèse Doctorat Spécialité Math. Pures, Fac Sc Université de Grenoble (1969)

[Vey] Vey J. : Sur les automorphismes affines des ouverts convexes saillants. in Annali della Scuola Normale Sup di Pisa, classe di Science Serie 3 tome 24 1970 641-665

[Vinberg] Vinberg E. B. : Homogeneous cones. in Soviet Math Dokl (1960)787-790

[Vinberg] Vinberg E.B. : The theory of homogeneous cones. in Trans. Moscow Math Soc (1963) 340-403

[Vinberg] Vinberg E.B. : The structure of the group of automorphisms of a

[Weinstein] Weinstein A. : Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds. in Advances in Math. 6 (1971) 329-346

homogeneous convex cone. in Trans. Moscow Math Soc (1965) 63-93

[Matsushima] Matsushima Y. : Affine structure on complex manifolds. in Osaka J. Math. 5 (1968) 215-222

[McCullagh] McCullagh P. : What is a statistical model ? in Annals of Statistics (2002) vol 30 (5), 1225-1310

[Molino] Molino P. : Riemannian foliations, Birkhauser, Boston, Massachusetts

IMAG Alexander Grothendieck Research Institute UMR CNRS 5149 University of Montpellier

E-mail address: boyom@math.univ-montp2.fr